Om Differentialligningers Integration ved bestemte Integraler.

Af

Adolph Steen.

(Meddelt den 3. December 1880.)

Til Integration af Differentialligninger benytter man sædvanlig to forskjellige Methoder, bortset fra den, Cauchy har anvendt paa den fuldstændige lineære Differentialligning, forudsat, at den homogene lineære Ligning først er integreret, hvorved kun opnaas en ny Fremgangsmaade for at naa et bekjendt Maal. Den ene Methode, som Laplace har angivet og som siden er brugt af mange, navnlig Spitzer og Winckler, opstiller umiddelbart en Form for det bestemte Integral med ubestemte Grænser og med Funktioner dels af bekjendt, dels af ubekjendt Art; Integralets Indførelse i Ligningen skal da give Midler til passende Bestemmelse af Grænserne og den ubekjendte Funktion, det sidste ved Hjælp af en anden, integrabel Differentialligning. Den anden Methode gaar ud paa Integration ved uendelige Rækker, hvilke derpaa ændres til bestemte Integraler, og deri har navnlig Kummer været heldig.

Det vilkaarlige Udgangspunkt i den første Methode kan, som alle lignende famlende Fremgangsmaader, altid kun i ringe Grad tiltale den, som især af Hensyn til Undervisningen interesserer sig for en rationel Fremstilling. Jeg har derfor i 1868 paa Naturforskermødet i Christiania vist, hvorledes Valget af det bestemte Integrals første Form kan ske i Henhold til tidligere bekjendte Resultater. Jeg kom derved til ikke blot paa en almindelig Maade at finde Integralet af oftere behandlede Ligninger, men ogsaa til at integrere enkelte andre, som ikke forhen vare behandlede, navnlig saadanne, som slutte sig til Differentialligninger med alle deres partikulære Integraler af samme Form. Et Exempel derpaa faas ved at gaa ud fra

$$x^{2n}\,y^{(n)} - a^n\,y = 0$$

med de partikulære Integraler

$$y = x^{n-1}\,e^{\frac{m}{x}},\ \text{hvor}\ (-1)^n\,m^n - a^n = 0.\,[1]$$

Thi naar man skal integrere

$$x^{2n}\,y^{(n)} + p x^{2n-1}\,y^{(n-1)} - a^n\,y = 0,$$

saa bemærkes først, at den førstnævnte Ligning har

$$y = x^{n-1}\,e^{\frac{m}{x}} = \int_{-\infty}^{m} x^{n-2}\,e^{\frac{u}{x}}\,du \ \text{for}\ x > 0$$

og

$$y = x^{n-1}\,e^{\frac{m}{x}} = \int_{m}^{\infty} x^{n-2}\,e^{\frac{u}{x}}\,du \ \text{for}\ x < 0,$$

og derefter prøves, om man kan have den anden integreret ved

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} x^{n-2}\,e^{\frac{u}{x}}\,f(u)\,du,$$

hvilket bliver muligt, idet man faar, f. Ex. naar $p < n$,

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} c_r \int_{-\infty}^{\rho_r a} \frac{x^{n-2}\,e^{\frac{u}{x}}}{\left((-1)^n\,u^n - a^n\right)^{\frac{p}{n}}}\,du,$$

hvor $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ ere de $n$te Rødder af 1.

I Aar har jeg fundet en ny Maade, hvorpaa Overgangen til almindelig Integration af en Differentialligning ved bestemte Integraler er mulig, naar først en særlig Form deraf kan integreres ved flerdobbelte Integraler. Det er nemlig bekjendt nok, hvor-

[1]) Jfr. Vidensk. Selsk. Oversigt 1866 S. 77 og Tychsen Tidsskrift for Math. 2 Række 2 Aarg. S. 138 (se ogsaa The Quarterly Journ. Febr. 1867 p. 128).

ledes disse lade sig ændre til bestemte Integraler efter en ganske almindelig Formel (se min Diff. og Integr.-Regn. Kbhvn. 1876, P. 153 Formel (125)). Dette skal jeg oplyse ved Hjælp af et meget simpelt Exempel, der tilsteder ved gjentagne Differentiationer eller formelle Integrationer at komme til Integration ved flerdobbelte Integraler i et specielt Tilfælde, medens det deraf dannede bestemte Integral er gyldigt i större Almindelighed. I et andet Tilfælde kommer jeg til multiple Integraler igjennem en Række Substitutioner, men da Udviklingen deraf vil blive trykt andensteds, skal jeg her kun kort berøre Resultatet.

Af Differentialligningen

$$y'' - axy' + \mu ay = 0 \tag{1}$$

faas ved Differentiation

$$y''' - axy'' + (\mu - 1)\, ay = 0,$$

altsaa naar μ er et helt positivt Tal, ved μ Differentiationer

$$y^{(\mu+2)} - axy^{(\mu+1)} = 0,$$

som giver

$$y^{(\mu+1)} = C_1\, e^{\frac{1}{2}ax^2}.$$

Integreres nu $\mu + 1$ Gange uden Tilföjelse af arbitrære konstante, faar man et af de partikulære Integraler af (1), medens alle de andre Led, som følge af Tilföjelsen af konstante, danne det andet. Følgelig bliver det fuldstændige Integral

$$y = C_1 \int^{\mu+1} e^{\frac{1}{2}ax^2}\, dx^{\mu+1} + C_2 x^{\mu} + C_3 x^{\mu+1} + \ldots + C_{\mu} x + C_{\mu+1},$$

hvor kun en af de konstante C_2, $C_3 \ldots C_{\mu+1}$ er arbitrær.

Det første partikulære Integral kan ændres til

$$x^{\mu} \int e^{\frac{1}{2}ax^2}\, dx - \frac{\mu}{1} x^{\mu-1} \int e^{\frac{1}{2}ax^2}\, x dx$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} \int e^{\frac{1}{2}ax^2}\, x^2 dx - \ldots + (-1)^{\mu} \int e^{\frac{1}{2}ax^2}\, x^{\mu} dx$$

og ved en Række delvise Integrationer til

$$X_1\, e^{\frac{1}{2}ax^2} + X_2 \int e^{\frac{1}{2}ax^2}\, dx,$$

hvor X_1 og X_2 ere hele algebraiske Funktioner, som let findes.

Men dette Integral kan ogsaa omskrives til

$$\int_b^x (x-\alpha)^\mu e^{\frac{1}{2}a\alpha^2}\, d\alpha, \tag{2}$$

hvor b maa være saaledes bestemt, at intet af Integralerne $\int e^{\frac{1}{2}ax^2} x^p\, dx$ bliver uendeligt for $x = b$ og at der ikke frembringes Potenser af x, som kunne föjes til de følgende af Integrationskonstanterne dannede Led, saa at disse ophøre at danne et partikulært Integral.

Indsættes (2) for y i den forelagte, faar man efter en let Reduktion

$$\int_b^x (x-\alpha)^{\mu-2} \left(\mu - 1 - a\alpha(x-\alpha)\right) e^{\frac{1}{2}a\alpha^2}\, d\alpha = 0.$$

Men nu er

$$\int_b^x (x-\alpha)^{\mu-1} e^{\frac{1}{2}a\alpha^2} a\alpha d\alpha.$$

$$= -(x-b)^{\mu-1} e^{\frac{1}{2}ab^2} + (\mu-1)\int_b^x (x-\alpha)^{\mu-2} e^{\frac{1}{2}a\alpha^2}\, d\alpha,$$

saa at Ligningen tilfredsstilles, naar blot $b^2 = -\infty$, $b = \infty\sqrt{-1}$. Det er ikke engang længer nødvendigt, at μ er et helt Tal, det er nok at have $\mu > 1$, saa at (1) for alle μ större end 1 har det partikulære Integral

$$y = \int_{-\infty\sqrt{-1}}^x (x-\alpha)^\mu e^{\frac{1}{2}a\alpha^2}\, d\alpha.$$

Indsættes det andet partikulære Integral, dannet af alle Led i det fuldstændige paa det første nær, vil man let se, at C_2 bliver arbitrær, at C_1, C_3, C_5 .... alle forsvinde og at enhver af de andre C_4, C_6, ... bliver lig C_2 multipliceret med en Koefficient. Man faar nemlig

$$(\mu a - \mu a)\, C_2 = 0, \quad C_4 = -\frac{\mu(\mu-1)}{2a} C_2, \quad C_6 = -\frac{(\mu-2)(\mu-3)}{4a} C_4$$

o. s. v., altsaa

$$C_{2p} = (-1)^{p-1} \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-2p+1)}{2 . 4 \ldots\ldots 2p\, a^{p-1}} C_2.$$

Ogsaa dette Integral tilfredsstiller (1) uafhængig af μ's Beskaffenhed; men kun hele positive μ give en endelig Række, for andre μ kræves derfor, at Rækken bliver konvergent.

Er $\mu < 1$, kan man gaa frem paa en anden Maade, der i sin Begyndelse er den omvendte af den foregaaende. For hele negative μ eller for

$$y'' - axy' - \mu ay = 0, \tag{3}$$

hvor μ er hel positiv, integrerer man, idet man bruger Betegnelsen

$$\int^p y dx^p = y^{(-p)}.$$

Man faar først

$$y' - axy - (\mu - 1) ay^{(-1)} = 0,$$

og efter μ Integrationer

$$y^{(-\mu+2)} - axy^{(-\mu+1)} = 0,$$

som giver

$$y^{(-\mu+1)} = Ce^{\frac{1}{2}ax^2},$$

følgelig

$$y = \frac{d^{\mu-1} e^{\frac{1}{2}ax^2}}{dx^{\mu-1}} = \int^{-\mu+1} e^{\frac{1}{2}ax^2} dx^{-\mu+1}.$$

Det andet partikulære Integral kommer ikke frem her, men efter det nylig viste, behøves det heller ikke, uden for saavidt det var værd at faa under endelig Form.

En fælles Form for det første partikulære Integral, kan faas ved Formler, som ere bekjendte fra Theorien om Differentiation og Integration med hvilkesomhelst Indices. Først har man for positive μ

$$\int^{\mu+1} e^{\frac{1}{2}ax^2} dx^{\mu+1} = \frac{1}{(-1)^{\mu+1} \Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)} \alpha^\mu d\alpha. \tag{4}$$

Men dette Integral tilfredsstiller ikke (1), vistnok fordi det indeholder Led af Formen Cx^p, der udtrykkelig ere udeladte af det første partikulære Integral. Man kan derfor undersøge, om det ikke er muligt at gjöre

$$y = \int_b^c e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2} \alpha^\mu d\alpha.$$

Derved faar man

$$\int_b^c e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2} \left[a^2 \alpha (x+\alpha) + a(\mu+1)\right] \alpha^\mu d\alpha = 0$$

at tilfredsstille ved passende Værdier for b og c. Men da

$$a\int_b^c e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\, a\,(x+\alpha)\,\alpha^{\mu+1}\,d\alpha$$

$$= a\left|\, e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\,\alpha^{\mu+1}\right|_b^c - (\mu+1)\,a\int_b^c e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\,\alpha^{\mu}\,d\alpha,$$

reduceres Ligningen til det første Led paa höjre Side af denne Ligning, saa at der kun behøves saadanne Værdier af b og c, at $e^{\frac{1}{2}a(x+b)^2} = 0$ og at $c^{\mu+1} = 0$, men ikke $e^{\frac{1}{2}(x+c)^2} = \infty$; man faar da kun

$$b = \infty\sqrt{-1},\ c = 0.$$

Dernæst har man

$$\frac{d^{\mu-1}\,.\,e^{\frac{1}{2}ax^2}}{dx^{\mu-1}} = \frac{1}{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(\lambda)}\int_0^{\infty}\frac{d^{\lambda+\mu-1}\,.\,e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}}{dx^{\lambda+\mu-1}}\,\alpha^{\lambda-1}\,d\alpha,$$

hvor λ ikke er negativ, $\lambda+\mu-1$ hel. Disse Betingelser opfyldes, naar

$$\lambda+\mu-1 = 0, \qquad \lambda = -\mu+1,$$

altsaa

$$\frac{d^{\mu-1}\,.\,e^{\frac{1}{2}ax^2}}{dx^{\mu-1}} = \frac{1}{(-1)^{\mu+1}\,\Gamma(-\mu+1)}\int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\,\alpha^{-\mu}\,d\alpha,$$

hvis Lighed med (4) er umiskjendelig. Søger man nu at bestemme b og c saaledes, at (3) faar Integralet

$$y = \int_b^c e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\,\alpha^{-\mu}\,d\alpha,$$

saa faas, som ovenfor, først

$$\int_b^c e^{\frac{1}{2}(x+\alpha)^2}\left(a^2\,\alpha\,(x+\alpha) + a(-\mu+1)\right)\alpha^{-\mu}\,d\alpha = 0$$

og dernæst, idet $\mu < 1$

$$e^{\frac{1}{2}a(x+b)^2} = 0,\quad c^{-\mu+1} = 0,\quad b = \infty\sqrt{-1},\quad c = 0.$$

Derved er altsaa bevist, at

Differentialligningen

$$y'' - axy' \pm \mu a y = 0$$

har følgende partikulære Integraler (for nederste Tegn $-\mu > -1$)

$$y = \int_{\infty\sqrt{-1}}^{0} e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2}\,\alpha^{\pm\mu}\,d\alpha$$

og

$$y = x^{\pm\mu} - \frac{\mu(\mu \pm 1)}{2 \,.\, a} x^{\pm\mu-2} + \frac{\mu(\mu \mp 1)(\mu \mp 2)(\mu \mp 3)}{2 \,.\, 4\, a^2} x^{\pm\mu-4} - \cdots$$

Methoden kan ogsaa anvendes paa

$$(a_0 x + b_0) y'' + (a_1 x + b_1) y' + a_2 x + b_2) y = 0,$$

men Resultatet bliver meget mere sammensat.

Ved en almindelig Behandling af Ligningen

$$y'' + Py' + ay = 0$$

kan dens Integration vises at lade sig finde, naar

$$v'' - Pv' + av = 0$$

er integrabel, og omvendt. Naar derfor en af Ligningerne

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right) y' + cy = 0,$$

$$v'' + \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right) v' + cv = 0.$$

kan integreres, saa kan den anden ogsaa. En Række Substitutioner vil, naar bc er et helt lige positivt Tal, gjöre den første integrabel ved et flerdobbelt Integral. Gjöres dette til et bestemt Integral, faas, naar blot $bc > 2$, følgende partikulære Integraler

$$y = \int_{-\infty}^{x^2} (x^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}bc}\, \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}\, e^{\frac{\alpha}{2b}}\, d\alpha$$

og

$$v = x^{1-a}\, e^{-\frac{x^2}{2b}} \int_{-\infty}^{x^2} (x^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}bc-1}\, \alpha^{\frac{a-bc-1}{2}}\, e^{\frac{\alpha}{2b}}\, d\alpha.$$